27/2/19

"Βασικές τοπολογικές έννοιες"

(X,ρ) μ.χ.

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $x \in X$, $r > 0$

$S(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$: Σφαίρα

$B(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) \leq r\}$: Μπάλα

$C(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) = r\}$: Κύκλος

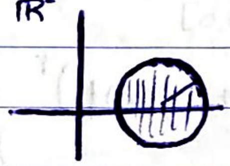
$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: • $(\mathbb{R}, |\ |)$

$x \in \mathbb{R}$, $S(x_0, r) = (x_0 - r, \ x_0 + r)$

$B(x_0, r) = [x_0 - r, \ x_0 + r]$

$C(x_0, r) = \{x_0 - r, \ x_0 + r\}$

• $\mathbb{R}^2$



$x = (x_1, x_2)$

$S(x,r) = \{y : ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}} < r\}$

• ρ = διακριτή μετρική

$x_0 \in X$, $r = 1$

$(x_0, 1) = \{x_0\}$

$B(x_0, 1) = X$

$C(x_0, 1) = X \setminus \{x_0\}$

$S(x_0, 1) = \{x_0\} \subsetneq B(x_0, 1)$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $A \subseteq X$, $B \subseteq X$

$\rho(A,B) := \inf\{\rho(x,y) : x \in A \ \& \ y \in B\} \geq 0$

$\rho(x,y) \geq \rho(A,B)$, $x \in A$, $y \in B$

$\rho(a, A) := \rho(\{a\}, A) = \inf\{\rho(a,x) : x \in A\}$

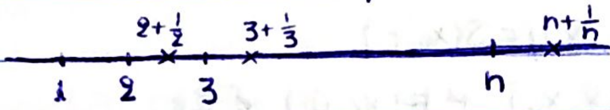
Παρατήρηση: $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \rho(A,B) = 0$

$\not\Leftarrow$

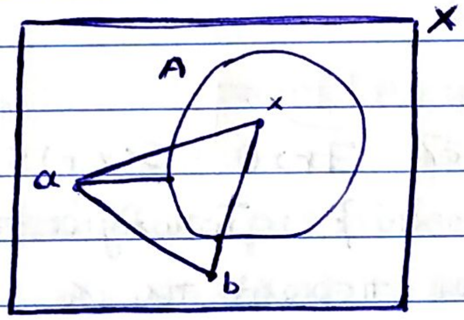
$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ}}$: $(\mathbb{R}, |\,|)$

$A = \mathbb{N}$, $B = \{n + \frac{1}{n} : n = 2, 3, \dots\}$

$A \cap B = \emptyset \not\Rightarrow \rho(A,B) = 0$



Πρόταση: $A \subseteq X$. Ισχύει $|\rho(a,A) - \rho(b,A)| \le \rho(a,b)$



Αποδ.

$$\rho(a,A) = \inf\{\rho(a,x) : x \in A\}$$
$$\le \inf\{\rho(a,b) + \rho(b,x) : x \in A\}$$
$$= \rho(a,b) + \underbrace{\inf\{\rho(b,x) : x \in A\}}_{\rho(b,A)}$$

$$\Rightarrow \rho(a,A) - \rho(b,A) \le \rho(b,A)$$

Εναλλάσσοντας τα a, b έχουμε:

$$\rho(b,A) - \rho(a,A) \le \rho(b,a)$$

Άρα $|\rho(a,A) - \rho(b,A)| \le \rho(a,b)$

• ΟΡΙΣΜΟΣ: $A \subseteq X$, $A \neq \emptyset$

$$\delta(A) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\}$$

Το A λέγεται φραγμένο $\Leftrightarrow \delta(A) < \infty$

A φραγμένο $\Leftrightarrow \exists r>0 \ \exists x_0 \in X : A \subseteq S(x_0, r)$ ΑΣΚΗΣΗ

Προφανώς $\delta(A) = 0 \Leftrightarrow A$ μονοσύνολο

<u>Π.χ.</u> $S(x_0, r)$, $x, y \in S(x_0, r)$

$\rho(x,y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) < 2r$

$\delta(S(x_0, r)) < 2r$

Προφανώς $\emptyset \neq A \subseteq B \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$

• <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: A ανοικτό $\Leftrightarrow \forall x \in A \ \exists r>0 : S(x, r) \subseteq A$

$\tau_\rho = \{G \subseteq X \mid G$ ανοικτό$\}$: Τοπολογία του X

$x_0 \in X$, $C \subseteq X$ λέγεται περιοχή του x_0

$\Updownarrow$

$\exists A$ ανοικτό : $x_0 \in A \subseteq U$

$\Pi_{x_0} = \{U \subseteq X : U$ περιοχή του $x_0\}$

Προφανώς A ανοικτό $\Leftrightarrow A \in \Pi_x$, $\forall x \in A$

• <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: $A \subseteq X$

$x \in X$ λέγεται εσωτερικό σημείο του A αν-ν $\exists r>0 : S(x, r) \subseteq A$

A° ή $\operatorname{int} A = \{x \mid x$ εσωτερικό σημείο$\}$

<u>Π.χ.</u> $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

<u>Πρόταση</u>: (i) A ανοικτό $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$

(ii) $\mathring{A} = \bigcup \{G \mid G \subseteq A$ κ. $G \in \tau_\rho\}$ = μέγιστο ανοικτό

(iii) $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$

(iv) $\widehat{A \cap B}^{\circ} = A^\circ \cap B^\circ$

<u>Σημείωση</u>: $A^\circ \cup B^\circ \subseteq \widehat{A \cup B}^{\circ}$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $A \subseteq X$, $extA = int(X \setminus A)$

Πρόταση: $x \in extA \iff \rho(x,A) > 0$

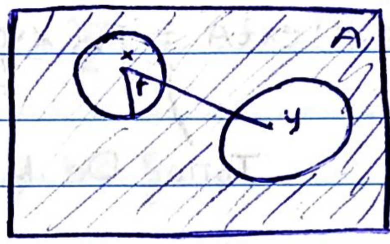
Αποδ.:

$\Rightarrow$) $x \in extA \Rightarrow \exists r>0 : S(x,r) \subseteq X \setminus A$

Έστω $y \in A$

$\Rightarrow y \notin S(x,r)$

$\Rightarrow \rho(x,y) \geq r$



$$\Rightarrow \underbrace{\inf\{\rho(x,y) : y \in A\}}_{\rho(x,A)} \geq r > 0$$

$\Leftarrow$) Έστω $\rho(x,A) = r > 0$

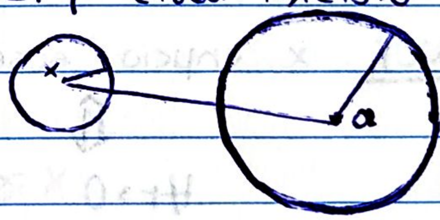
$y \in S(x,r) \Rightarrow \rho(x,y) < r \Rightarrow y \notin A$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $B \subseteq X$ λέγεται κλειστό $\iff X \setminus B$ είναι ανοικτό

π.χ. • $(-\infty, 0)$ ανοικτό στο $\mathbb{R} \Rightarrow [0,\infty)$ κλειστό

$a,b>0$, $(-\infty,a) \cup (b,+\infty)$ ανοικτό $\Rightarrow [a,b]$ κλειστό

• $B(a,r) = \{r : \rho(x,a) \leq r\}$ είναι κλειστό



$X \setminus C(a,r) = S(a,r) \cup (X \setminus B(a,r))$ ανοικτό

$\Rightarrow C(a,r)$ κλειστό

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $x \in X$ λέγεται σημείο επαφής του A αν-ν

$\forall r>0 : S(x,r) \cap A = \emptyset$

$\bar{A}$ ή $\partial A = \{x : x$ σημείο επαφής$\}$

Πρόταση: (i) $x \in \bar{A} \iff x \notin extA$ ή $\bar{A} = X \setminus extA$

(ii) A κλειστό $\iff A = \bar{A}$

(iii) $\bar{A} = \bigcap\{F : F$ κλειστό $\forall A \subseteq F\}$ = το μικρότερο κλειστό που περιέχει το A

$\left(extA = int(X \setminus A) = \bigcup\{G : G \text{ ανοικτό } \forall G \subseteq X \setminus A\} \right)$

$\bar{A} = X \setminus extA = \bigcap\{\underset{\substack{\shortparallel \\ F}}{X \setminus G} \mid F \text{ ανοικτό}, F \supseteq A\}$

Τύποι De Morgan

- **ΟΡΙΣΜΟΣ**: $A \subseteq X$

$fr(A)$ ή $\partial A = \{x : S(x,r) \cap A \neq \emptyset \ \& \ S(x,r) \cap X \setminus A \neq \emptyset\}$

$= \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A})$ κλειστό

$X = \underbrace{intA \cup extA \cup fr(A)}_{\text{ξένα ανά δύο}}$

$\bar{A} = intA \cup fr(A)$

- **ΟΡΙΣΜΟΣ**: x σημείο συσσώρευσης του A

$\Updownarrow$

$\forall r > 0 : S(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

$(A' = \{x : x \text{ σ.σ. του } A\} \subseteq \bar{A}$

Πρόταση: $A \subseteq X$

$x \in \bar{A} \iff \rho(x, A) = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 2-14 : Ν.δ.ο. $\delta(A) = \delta(\bar{A})$

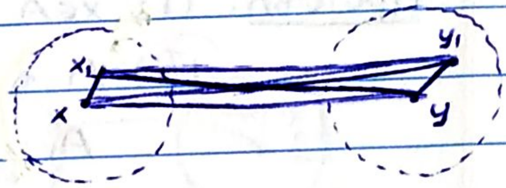
ΛΥΣΗ:

$\delta(A) = \sup\{\rho(x,y) : x,y \in A\}$

$\{\rho(x,y) : x,y\in A\} \subseteq \{\rho(x,y) : x,y \in \bar{A}\}$

Έστω $x,y\in\bar{A}$, $\varepsilon>0$

$\exists x_1 \in A : \rho(x,x_1) < \frac{\varepsilon}{2}$



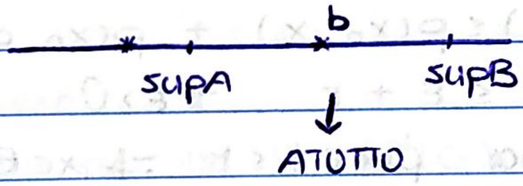
$\exists y_1 \in A : \rho(y,y_1) < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\begin{aligned}\rho(x,y) &\le \rho(x,x_1) + \rho(x_1,y)\\ &\le \rho(x,x_1) + \rho(x_1,y_1) + \rho(y_1,y)\\ &\le \rho(x_1,y_1) + \varepsilon\end{aligned}$$

Λήμμα: $A\subseteq B\subseteq \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon>0 \quad \forall b\in B \quad \exists a\in A : b < a+\varepsilon \implies \sup A = \sup B$

Sketch:



"Όρια - Συνέχεια"

• ΟΡΙΣΜΟΣ: (X,ρ) μ.χ.

$\{x_n : n=1,2,\dots\} \subseteq X$

$x_n \to x\in X$, $x_n\to\infty \iff \forall\varepsilon>0 \quad \exists n = n_0(\varepsilon,\{x_n\})$:

$(\eta \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x)$ $\quad \rho(x,x_n)<\varepsilon$, για $n\ge n_0$

Π.χ. • $\mathbb{R}^k$, $\rho_\infty(x,y) = \sup\limits_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$, $\rho_2(x,y) = \left\{\sum (x_i-y_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$,

$\rho_1(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$

$x_n = (x_{n_1},\dots,x_{n_k}) \to x = (x_1,\dots,x_k) \iff x_{n_i}\to x_i$, $i=1,2,\dots,k$

• $x_n = c$, $n\ge n_0 \implies x_n\to c$

$\longrightarrow$

- ρ = διακριτή μετρική

$x_n \xrightarrow{\rho} x \iff \exists n_0 : x_n = x$, για $n \geq n_0$

Πρόταση: (i) $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n) \subseteq A : x_n \to x$, $n \to \infty$

sos (ii) A σύνολο

Αν $x_n \in A$, $n = 1, 2, \dots$ με $x_n \to x \implies x \in A$

τότε το A κλειστό

Εφαρμογή:

$B(a, r) = \{x : \rho(x, a) \leq r\}$ κλειστό

$x_n \in B(a, r) \iff \rho(x_n, a) \leq r$

$x_n \to x \implies \forall \varepsilon > 0 : \rho(x_n, x) \leq \varepsilon$

Ν.α.ο. $\rho(x, a) \leq r$

Λύση:

$\varepsilon > 0$

$\rho(x, a) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x_n, a)$

$\leq \varepsilon + r \quad \forall \varepsilon > 0$

Άρα $\rho(x, a) \leq r \implies x \in B(a, r)$

$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↑

$k(n) = k_n$

$x : \mathbb{N} \to X$, $x(n) = x_n$

$x \circ k : \mathbb{N} \to X$, x_{k_n} , $n = 1, 2, \dots$

Αν $x_n \to x \iff \forall (k_n)$ ↑ $: x_{k_n} \to x$

$x_n \not\to x \iff$ ~~$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n \; \exists k_n' \in \{k_n > n\} , \rho(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon$~~

$\iff \exists \{k_n'\}$ ↑ $: \rho(x_{k_n'}, x) \geq \varepsilon$